

المحاضرة الخامسة

معادلة الزينبات المستقيمة المستقيمة نصياً

ندرس

عينة حل معادلة الزينبات

$$(1) \quad a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \infty$$

عند حل المعادلة الذي يحقق الشرط الحدي

$$(2) \quad u(0, t) = u(t, 1); \quad t > 0$$

والشرطين الابتدائيين

$$(3) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x); \quad 0 < x < \infty$$

نظرية : إذا كانت المعطيات الابتدائية في مسألة انتشار

الزينبات (1) مستقيم لائحي في مسألة (1) و (2) دوال فردية

بالنسبة لنقطة ما x_0 فإن الحل للناظر لهذه النقطة يكون مساوياً للصفر

$$u(x_0 = 0, t) = 0$$

أي سوف نثبت أن :

البرهان : نعتبر x_0 نقطة الأصل $x_0 = 0$ في هذه الحالة تنكس الشرط الفردي

للمعطيات الابتدائية على أن كل الاتي :

$$\varphi(x) = -\varphi(-x) \quad \text{و} \quad \psi(x) = -\psi(-x)$$

$$\varphi(x) = -\varphi(-x)$$

منه نجد أن حل المسألة (1) و (2) حل معادلة الزينبات للوقت للمقارنة

مع شروط الابتدائية تلك علاقة دال أصير

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

نبدل في علاقة دالامبير كل x بـ 0 فنحصل على

$$u(0, t) = \frac{\varphi(0+at) + \varphi(0-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(z) dz$$

بما أن $\varphi(x)$ دالة فردية فإن الحد الأول يطابق الصفر وذلك

$$\varphi(-at) = -\varphi(at)$$

وأيضاً الحد الثاني يؤول للصفر لأن

فردية وصدور التكامل متماثلة بالنسبة لمبدأ الإحداثيات المختلفة

$$\Rightarrow u(0, t) = 0$$

فرضية 2/1: إذا كانت المعطيات الابتدائية في الحالة انتشار

الذبذبات مستقيم لا زلزلي (للا آلة الموازنة) دوال زوجية بالنسبة

إلى نقطة ما x فإن مشتق الحل المناظر في هذه النقطة يكون

$$u_x(0, t) = 0, (x_0 = 0)$$

البرهان: فغیر 0 x في هذه الحالة تكفي الشروط الزوجية للمعطيات

الابتدائية على الشكل الآتي:

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \quad \psi(x) = \psi(-x)$$

بمشتقاق هذه العلاقات فنحصل على:

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x), \quad \psi'(x) = \psi'(-x)$$

ومن جهة أخرى حل المعادلة (1) يعطينا علاقة دالامبير:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi(x+at) - \psi(x-at)]$$

نبدل كل x بـ 0 :

$$u_n(0, t) = \frac{1}{2} [\varphi'(at) + \varphi'(-at)] + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)]$$

مما ذكره سابقا الدالة زوجية فتقاربا الدالة فردية فيكون:

$$\varphi'(-at) = -\varphi'(at)$$

ومما ذكره سابقا $\psi(at) = \psi(-at)$ زوجية فبالتالي:

$$u_n(0, t) = \frac{1}{2} [\varphi'(at) - \varphi'(at)] + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(at)] = 0$$

المسألة الجديدة الأولى:

عينة حل المعادلة:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad t > 0, \quad 0 < x < +\infty \quad (1)$$

والذي يحقق الشروط الابتدائية:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty \quad (2)$$

والشروط الحدية الصغرى: (3) $u(0, t) = 0, \quad t > 0$

بمما ذكره سابقا $\varphi(x), \psi(x)$

والتي فرديتين:

الحل: لحله هذه المسألة نذكر الدالتين $\phi(x)$ و $\psi(x)$ اللتين
تعتبران امتدادا للدالتين $\varphi(x), \psi(x)$ اللتين توفلان

في الشروط الابتدائية (2):

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & ; x > 0 \\ -\varphi(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & ; x > 0 \\ -\psi(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

من علاقة دالمبير لبيد الدالة:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz \quad (u)$$

و $t > 0$ معرفه لجميع قيم x ووفقاً للنظرية الأولى يكون:

$$u(0, t) = \frac{\phi(at) + \phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(z) dz = 0$$

ومن نظرية عندما $x=0$ فإن:

$$u(0, t) = 0$$

فقد تحقق الشرط الحادي (3) ومن جهة أخرى فإن هذه الدالة عندما $x=0$ و $t > 0$ تحقق الشرط الابتدائي (2) وذلك لأن من العلاقة (4) تبدل كل x بصفر:

$$u(x, 0) = \phi(x) = \varphi(x)$$

نشتق العلاقة (4) بالنسبة لـ t :

$$u_t(x, t) = \frac{a \phi'(x+at) - a \phi'(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} [a \psi(x+at) + a \psi(x-at)]$$

 $x > 0$

$$u_t(x, 0) = \frac{a \phi'(x) - a \phi'(x)}{2} + \frac{1}{2} [\psi(x) + \psi(x)] = \psi(x)$$

وبالعودة إلى الدوال الأصلية $\varphi(x)$, $\psi(x)$ يمكن كتابة حل المسألة المطروحة بالعلاقة (4) على الشكل الآتي:

$$(1') \text{ عندما } x-at > 0 \text{ من العلاقة (4) تكون على الشكل التالي}$$

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

وهي علاقة دالامبير.

هذا إلى المسألة الحديثة عندما $x-at > 0$ هي عبارة عن علاقة دالامبير.

(2) حالة $x - at < 0$ أي $x < at$

من علاقة (4) نجد : $x < at$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(-z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(z) dz$$

I

$$I = - \int_{x-at}^0 \psi(-z) dz$$

نقرب : $-z = v \Rightarrow dz = -dv$

$z = x - at \Rightarrow v = at - x$

$z = 0 \Rightarrow v = 0$

$$I = + \int_{at-x}^0 \psi(v) dv$$

$$I = \int_{at-x}^0 \psi(z) dz$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^0 \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(z) dz \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(z) dz$$

وهذا المطلوب

طريقة فصل المتغيرات (طريقة فورييه).

(1) المعادلة المتجانسة للذبذبات الحرة للوتر:

فوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = a^2 u_{nn} \quad (1)$$

والمحقق للشرط الحدية الصفرية:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2)$$

والشرط الابتدائية:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3)$$

الحل: صيغة آلة المسامعة الأسكنية:

عند حل المعادلة (1) الذي لا يساوي الصفر بالتطابق والذي

يحقق الشروط المتجانسة الحدية (2) والقابل للتغير عنه في فترة

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (4)$$

علماً أن X ثابتة x فقط و T ثابتة t فقط.

هذا الحل يجب أن يحقق المعادلة (1) أي $T(t) \neq 0, X(x) \neq 0$

$$u_t = X(x) T'(t)$$

$$u_{tt} = X(x) T''(t)$$

$$u_n = X'(x) T(t)$$

$$u_{nn} = X''(x) T(t)$$

نبدل في المعادلة (1) فنحصل على:

$$X(x) T''(t) = a^2 X''(x) T(t)$$

وبقسمة الطرفين بالمعادلة $a^2 T(t) \cdot X(x) \neq 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (5)$$

الطرفان اللذين والأيسر في العلاقة (5) يحتفظان عند تغيير متغيرهما بقيمة ثابتة، ومن ثم يمكن كتابتهما بالشكل الآتي:

$$(6) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

عما أن λ ثابت نأخذ له له الحل بإشارة سالبة. دون أن نقتصر شيئاً عند ذلك عن إشارته. من العلاقة (6) نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$(7) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0$$

$$(8) \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0$$

ونطبق الشروط الحدية (2)، من (2) و (4) نجد:

$$0 = X(0) \cdot T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$0 = X(l) \cdot T(t) \Rightarrow X(l) = 0$$

ومن هنا يتبع ذلك الدالة $X(x)$ يجب أن تحقق الشرطين الإضافيين:

$$(9) \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

$$T(t) \neq 0$$

والا فقد كنا سنحصل على:

$$u(x, t) = 0 \quad \text{في حين أن الحالة تنصرف}$$

نفس الحل الغير النافذ (الغير الصريح) وكان يوجد أي شروط إضافية

$T(t)$ في (1) الحالة المسماة الاستثنائية.

وبذلك فتتجه لتعريف الدالة $X(x)$ لنصل إلى الحالة بسيطة هي

حالة القيم الذاتية الكلية:

عند قيم البارامترية التي توجد عندها حل غير كافي للحالة

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$\left. \begin{aligned} X(0) = X(l) = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

وكذلك عتبت هذه الحلول

قيم البارامتر λ تتجرب بالقيم الذاتية والحلول غير التافهة المناظرة لهذه القيم تتجرب بالدوال الذاتية للمعادلة (١٥).
حالة $\lambda < 0$ وسوف نبين أن للمعادلة لا تملك حلول غير

الحلول التافهة أي سوف نبين أن: $X(x) = 0$

$$\text{وذلك لأن: } p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda \Rightarrow p = \pm \sqrt{-\lambda}$$

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

علاوة على أن C_1, C_2 ثابتان اختيارين ونحددان من شروط المرافقة:

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2$$

$$X(p) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}p} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}p} \Rightarrow C_2 = -C_1$$

$$0 = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}p} = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}p}$$

$$C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}p} - e^{-\sqrt{-\lambda}p}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

بذلك في عبارة الحل العام: $X(x) = 0$

ومن ثم نبين في (١٦) أنه لا يوجد حل غير صفري وهذا مرفوض

حالة $\lambda = 0$ في هذه الحالة للمعادلة لا تملك سوى الحل الصفري

وذلك لأن المعادلة (١٥): $X'' = 0 \Rightarrow X' = C_1$

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$X(p) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 p + C_2 \Rightarrow C_1 p = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow \text{بذلك في (١٦)}$$

$$u(x, t) = 0$$

وهذا مرفوضا لتباينها عن الحل غير الصفري

$$X'' + \lambda X = 0$$

في حالة $\lambda > 0$:

$$p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda = \lambda i^2 \Rightarrow p = \pm \sqrt{\lambda} i$$

$$X(x) = a \cos \sqrt{\lambda} x + b \sin \sqrt{\lambda} x$$

حيث a, b ثوابت اختيارية يتحدد من الشروط المرافقة:

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = a$$

$$X(p) = 0 \Rightarrow 0 = a \cos \sqrt{\lambda} p + b \sin \sqrt{\lambda} p \Rightarrow$$

$$b \sin \sqrt{\lambda} p = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} p = 0 \quad (11)$$

(لأنه لو كان $b = 0$ لكان الحل الصفر وهذا مرفوض)

$$\sin \sqrt{\lambda} p = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} p = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{p} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وهي القيم الذاتية. وهذه القيم الذاتية تقابل بالذاتية

هنا: بديل في عبارة الحل العام:

$$X(x) = b_n \sin \frac{n\pi}{p} x$$

وهكذا فقط عند قيم λ المسماة (12) $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2$ ، $(n = 1, 2, 3, \dots)$

نحسب حلول غير تافهة (غير صفرية بالتطابق) للمعادلة (10)

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{p} x \quad (13)$$

والقيم الذاتية λ_n تناظرها حلول المعادلة (8):

$$T'' + a^2 \lambda T = 0$$

$$p^2 + a^2 \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = -a^2 \lambda = a^2 \lambda i^2$$

$$p = \pm a \sqrt{\lambda} i$$

$$T(t) = C \cdot \cos a \sqrt{\lambda} t + B \sin a \sqrt{\lambda} t$$

$$T_n(t) = C_n \cdot \cos \frac{n\pi}{p} a t + B_n \sin \frac{n\pi}{p} a t \quad (14)$$

حيث C_n, B_n ثوابت اختيارية

نقطة في (4) ~~فرض~~

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$u_n(x, t) = \left(C_n \cos \frac{n\pi}{p} at + D_n \sin \frac{n\pi}{p} at \right) \sin \frac{n\pi}{p} x \quad (15)$$

وبالتالي هذه المبراة المطروقة (1)، (2)، (3) يمكن باللاقة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi}{p} at + D_n \sin \frac{n\pi}{p} at \right) \sin \frac{n\pi}{p} x$$

على (15)

C_n, D_n ثابت اختيارية تحدد من الشروط التالية:

$$C_n = \frac{2}{p} \int_0^p \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{p} \xi d\xi$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^p \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{p} \xi d\xi$$

ملاحظة: ~~هذه الحالة~~

إذا أعطيت الشروط الحدية الصغرية على الشكل الآتي:

$$u(0, t) = 0, \quad u_n(p, t) = 0$$

عندئذ للحصول على حل المثلثية هذه الحالة يتبدل في الشروط

الآتية كل n بـ $\frac{2n+1}{2}$ والسلسلة تبدأ من: $n=0$

تمت أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(p, t) = 0 \quad (2)$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = -\frac{x}{p} \quad (3)$$

هذا الحل المعطاة يعطى بالمتسلسلة التالية:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi}{p} x + D_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right) \sin \frac{n\pi}{p} t$$

$$a = 1, \varphi(x) = 0, \psi(x) = -\frac{x}{p}$$

نلاحظ $C_n = 0$ $\varphi(x) = 0$

$$D_n = \frac{-2}{n\pi p} \int_0^p \left\{ \sin \frac{n\pi}{p} x \right\} dx$$

$$x = -\frac{p}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{p} x$$

$$D_n = \frac{-2}{n\pi p} \left[-\frac{p}{n\pi} \left\{ \cos \frac{n\pi}{p} x \right\} \right]_0^p + \frac{p}{n\pi} \int_0^p \cos \frac{n\pi}{p} x dx$$

$$= \frac{-2}{n\pi p} \left[\frac{-p^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{p}{n\pi} \left(\frac{p}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{p} x \right) \right]_0^p$$

$$D_n = \frac{2p(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p(-1)^n}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} t$$